



NB : La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. L'usage des calculatrices scientifiques et de tout matériel électronique n'est pas autorisé. Si au cours de l'épreuve le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 :

Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

où $p > 0$ est le prix d'une campagne publicitaire de l'année précédente.

- 1) Vérifier que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.
- 2) Déterminer l'espérance et la variance de X , si elles existent.
- 3) Connaissant son stock s , déterminer la probabilité de rupture de stock.

Exercice 2 :

Lors de son arrestation, un conducteur a reçu deux contraventions : une pour excès de vitesse et l'autre pour conduite dangereuse. Criant à l'injustice, il décide de les contester. Considérant les circonstances il évalue à 10 % ses chances d'être acquitté de l'accusation d'excès de vitesse et à 20 % ses chances d'être acquitté de l'accusation de conduite dangereuse. Il est aussi persuadé que s'il est acquitté de l'accusation d'excès de vitesse, il le sera aussi pour l'accusation de conduite dangereuse. Répondre aux questions qui suivent en supposant que les estimations du conducteur sont exactes.

- 1) Quelle est la probabilité pour que le conducteur soit acquitté des deux accusations ?
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'il soit acquitté d'au moins une des deux accusations ?
- 3) Si le conducteur est acquitté de l'accusation de conduite dangereuse, quelle est la probabilité pour qu'il le soit aussi pour l'accusation d'excès de vitesse ?

Problème :

Une urne contient une boule jaune, une verte et une rouge. On effectue n tirages successifs avec remise dans l'urne, et on s'intéresse au nombre de boules différentes obtenues à l'issue de ces n tirages. On note ainsi :

A_n l'évènement "Après n tirages, une seule boule a été tirée",

B_n l'évènement "Après n tirages, deux boules distinctes ont été tirées",

C_n l'évènement "À l'issue des n tirages, les trois boules ont été tirées".

On notera a_n , b_n et c_n les probabilités correspondantes :

$P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer U_1 et U_2 .

b. Montrer l'existence d'une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = MU_n$.

c. Prouver que, $\forall n \geq 1$, $U_n = M^{n-1} U_1$.

2) On considère dans cette partie la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 .

b. Montrer que, pour tout n entier naturel, il existe trois réels u_n , v_n et t_n tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix}$$

et déterminer par la même occasion des relations de récurrence vérifiées par les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c. En calculant $\sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)$, prouver que : $u_n = 2^{n+1} - 2$.

d. En calculant $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i} \right)$, déterminer la valeur de t_n .

On admet qu'on pourrait obtenir similairement : $v_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

3) a. Exprimer M en fonction de A et en déduire la valeur de M^{n-1} .

b. Déterminer les expressions des probabilités a_n , b_n et c_n .

c. Déterminer les limites de ces trois probabilités lorsque n tend vers l'infini. Les résultats obtenus sont-ils logiques ?

d. À partir de quelle valeur de n a-t-on plus de 99 % de chances d'avoir tiré au moins deux boules différentes ?

Fin de l'énoncé.